

الاسم:	امتحان مقرر المعادلات التفاضلية (1)	جامعة البعث
المدة:	للسنة الثانية رياضيات الفصل الدراسي الأول	كلية العلوم
الدرجة:	لعام 2017-2018م.	قسم الرياضيات

السؤال الأول (20 درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\dot{y} + 2xy = 2x e^{-x^2}$$

السؤال الثاني (20 درجة):

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية وفق الشروط المعطاة:

$$\dot{y} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \quad , \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

السؤال الثالث (20 درجة):

برهن أن $\frac{1}{x^2+y^2}$ هو عامل تكميل للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0$$

ثم جد الحل العام للمعادلة التامة وجميع عوامل التكميل لها .

السؤال الرابع (20 درجة):

جد الحل العام ديكارنيا للمعادلة التفاضلية التالية المحلولة بالنسبة لـ X :

$$Y^2 \dot{Y}^3 + 2X\dot{Y} - Y = 0$$

السؤال الخامس (20 درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$X\dot{Y} + \dot{Y} = 2X$$

✓

سلم تصحيح مقر العادلات التفاضلية (1)
للسنة الثانية رياضيات الفصل
الدراسي الأول لعام 1417/1418 هـ

جواب السؤال الأول (ع):

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

مما ولد حصة غير صفرية تأخذ المتغيرات من:
 $y' + 2xy = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2x dx \Rightarrow \ln \frac{y}{e} = -x^2 \Rightarrow$

(10) $y = ce^{-x^2}$ (*)

لتوجد قيمة C نشتق (*) باعتبار C متحول:
 $y' = c'e^{-x^2} + 2cx e^{-x^2}$

نعد في (*) (*) (*) في المعادلة المطابقة:
 $c'e^{-x^2} - 2cx e^{-x^2} + 2cx e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \Rightarrow c' = 2x \Rightarrow$

$$c = x^2 + c_1$$

(10) $y = x^2 e^{-x^2} + c_1 e^{-x^2}$

جواب السؤال الثاني (ع):

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

بالتعويض $y = vx$ و x بـ x نحصل على v ونطبق القواعد $f(x)$ على
 المعادلة فنجد $v'x + v = \frac{1}{x} + \sin v \Rightarrow x v' = \frac{1}{x} + \sin v - v$

(10) $\Rightarrow y' = z + xz'$ نعد في المعادلة:
 $z' + xz' = \frac{1}{x} + \sin z \Rightarrow \int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$$\ln |\tan \frac{z}{2}| = \ln |x| + \ln c \Rightarrow \tan \frac{z}{2} = cx \Rightarrow$$

الحل العام $z = 2 \arctan cx \Rightarrow y = 2x \arctan cx$
 لتوجد الحل الخاص:

(10) $\frac{\pi}{2} = 2 \arctan e \Rightarrow e = \tan \frac{\pi}{4} = 1$
 $y = 2x \arctan x$

جواب السؤال الثالث (ع):

لتبرهن أن $\frac{1}{x^2 + y^2}$ عامل تكامل فنجرب المعادلة:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy = 0 \quad (1)$$

تابع جواب السؤال الثالث :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

والمعادلة تامة و $\frac{1}{x^2+y^2}$ عامل تكامل للمعادلة.

نوجد الحل العام للمعادلة ① وذلك بتطبيق الطريقة :

$$F(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0,y) dy = c$$

10

وإذا أخذنا $x_0=0, y_0=1$ نجد :

$$F(x,y) = \int_0^x \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \int_1^y \frac{2y}{y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + \arctan \frac{x}{y} = c$$

وهذا هو الحل العام المطلوب و شريطة جميع عوامل التكامل للمعادلة هو :

10

$$\frac{1}{x^2+y^2} \phi \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + \arctan \frac{x}{y} \right)$$

جواب السؤال الرابع (c) :

$$y^2 y'^3 + 2xy' - y = 0$$

نقسم المعادلة بحلها بالسوية x :

$$2x = \frac{y - y^2 y'^3}{y'}$$

نفرض $y' = p$ نجد :

$$2x = \frac{y - y^2 p^3}{p} = \frac{y}{p} - y^2 p^2$$

نشتق بالسوية y نجد :

10 $2 \frac{dx}{dy} = \frac{2}{p} = \frac{p - y \frac{dp}{dy}}{p^2} \Rightarrow 2yp^2 - 2y^2 p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} - \left(\frac{y}{p^2} + 2yp \right) \frac{dp}{dy}$

$$\Rightarrow -2yp^2$$

نجمع الحدود المتشابهة نحصل على :

$$p(1+2yp^3) = -y(1+2yp^3) \frac{dp}{dy}$$

جواب السؤال الرابع :

$$1 + 2yP^3 \neq 0 \text{ تفحص علينا } ;$$

نفرض :

$$P = -y \frac{dP}{dy} \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int \frac{dy}{y}$$

بالمقابل نجد :

$$P = \frac{c}{y} \Rightarrow$$

الحل العام بسيطاً :

$$\begin{cases} y = \frac{c}{P} \\ x = \frac{c}{2P^2} - \frac{c^2}{2} \end{cases}$$

والحل العام دقيقاً أيضاً :

$$x = \frac{c}{2 \frac{c^2}{y^2}} - \frac{c^2}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{y^2}{c} - \frac{c^2}{2}$$

(10)

$$\Rightarrow 2cx = y^2 - c^3 \Rightarrow \boxed{y^2 - 2cx - c^3 = 0}$$

جواب السؤال الخامس (ج)

$$xy'' + y' = 2x$$

لا تحتوي المعادلة على تفحص $y' = P \Leftrightarrow y'' = P'$ نفحص :

$$xP' + P = 2x \Rightarrow P' + \frac{1}{x}P = 2$$

هي معادلة خطية بوجه حل العام بطريقة أويلر ليكن :

(10)

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x \Rightarrow$$

نضرب طرفي المعادلة به :

$$xP' + P = 2x \Rightarrow (Px)' = 2x \Rightarrow Px = \int 2x dx \Rightarrow$$

$$Px = x^2 + C_1 \Rightarrow P = x + \frac{C_1}{x} \Rightarrow y' = x + \frac{C_1}{x}$$

بالمقابل

الحل العام :

(10)

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + C_1 \ln x + C_2}$$

د. ميسور زعيم الدين